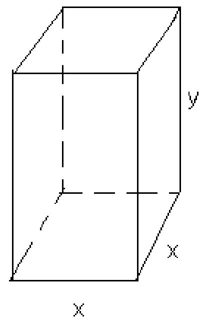
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2’5 puntos] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad de 13’5 m^3. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para el gasto de chapa sea el mínimo posible.

Solución



Función a Optimizar: Superficie $S = x^2 + 4xy$ (No tiene tapa superior)
Relación entre las variables: Capacidad = Volumen = $13'5 = x^2.y$, de donde $y = (13'5)/x^2$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$
Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x(13'5)/x^2 = x^2 + 54/x$
$S'(x) = 2x - 54/x^2$
De $S'(x) = 0$, tenemos $2x - 54/x^2 = 0$, es decir $2x = 54/x^2$, de donde $x^3 = 27$, y calculando la raíz cúbica sale **x = 3 m**, posible máximo ó mínimo.
$S''(x) = 2 + 108/x^3$
Como $S''(3) = 2 + 108/(3)^3 = 2 + 4 = 6 > 0$, x = **3 es un mínimo relativo**.

De x = 3, tenemos $y = 13'5/3^2 = 3/2 = 1'5$ m, **luego las dimensiones del depósito son x = 3 m. e y = 1’5 m.**

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2’5 puntos] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.
La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} x^2 + x - 2 & -1 \\ \hline x - 2 & \end{array}$$

Recordamos que $I = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int \left(-1 + \frac{x-2}{x^2 + x - 2} \right) dx = -x + I_1$.

I_1 ya es racional y descomponemos el denominador en producto de factores:
Resolviendo $x^2 + x - 2 = 0$, obtenemos $x = 1$ y $x = -2$, luego $x^2 + x - 2 = (x - 1)\cdot(x + 2)$

$I_1 = \int \frac{x-2}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} dx = \int \frac{Adx}{(x-1)} + \int \frac{Bdx}{(x+2)} = A\cdot\ln|x - 1| + B\cdot\ln|x + 2| = \{(*)\} =$
$= (-1/3)\cdot\ln|x - 1| + (4/3)\cdot\ln|x + 2|$.

(*) Calculamos A y B

$\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$. Igualando numeradores:
$+ x - 2 = A(x + 2) + B(x - 1)$. (Le damos a “x” el valor de las raíces, 1 y -2)
De $x = 1 \rightarrow 1 - 2 = A(1 + 2) + B(1 - 1) = 3A$, de donde $-1 = 3A$, luego $A = -1/3$.
De $x = -2 \rightarrow -2 - 2 = A(-2 + 2) + B(-2 - 1) = -3B$, de donde $-4 = -3B$, luego $B = 4/3$.

Por tanto **I =** $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx = -x + I_1$ $\mathbf{= - x + (-1/3)\cdot \ln|x - 1| + (4/3)\cdot \ln|x + 2| + K}$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Junio 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

a) [1’5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

a)
Discute el sistema según los valores de λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(\lambda)\cdot(-\lambda + 1) + 0 - (\lambda)\cdot(\lambda - 1) = -(\lambda)\cdot(-\lambda + 1 + \lambda - 1) =$
$= -(\lambda)\cdot(0) = 0$.
Sea cual sea el valor de $\lambda \in$ R, det(A) = 0, por tanto rango(A) < 3 siempre.

En A tomando el menor de orden 2, (dos primeras filas y dos primeras columnas),
$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 - \lambda = -\lambda$, vemos que si **$\lambda \neq 0$**, $\det(A) \neq 0$ y **rango(A) = 2.**

En A^* formamos el menor de orden 3 con las columnas 1ª, 2ª y 4ª, y por supuesto **$\lambda \neq 0$**. Tomamos 1ª y 2ª pues con ellas he determinado el menor de orden 2 de A.

En A* como $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(\lambda)\cdot(0 + 1) + 0 - (\lambda)\cdot(\lambda - 1) = -(\lambda)\cdot(1 + \lambda - 1) = -\lambda^2 \neq 0$,
puesto que $\lambda \neq 0$**, por tanto rango(A*) = 3.**
Luego **si $\lambda \neq 0$, rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, y el sistema es incompatible y no tiene solución**

Si $\lambda = 0$ tenemos $A \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que ambas matrices están escalonadas por filas y tienen dos filas con elementos distinto de cero, por tanto su rango es dos, es decir si **$\lambda = 0$, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.**

b)

Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Hemos visto que **$\lambda = 0$, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.** Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos.

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 0 \\ y - z &= -1 \end{aligned}$$

Tomo **$z = b$** $\in$ R, tenemos $y = -1 + b$ y $x = -(-1 + b) = 1 - b$, y las infinitas soluciones del sistema son **$(x,y,z) = (1 - b, -1 + b, b)$** con $b \in$ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Junio 2015

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a) [0'75 puntos] Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

(c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a)

Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

Con los puntos A, B y C formamos un plano π que tiene como punto el A y como vectores independientes el **AB** y **AC**. Después le imponemos la condición de que el punto D $\in \pi$.
Otra forma de hacerlo es viendo el rango de los vectores **AB, AC** y **AD.** Si el rango es 2 son coplanarios y si el rango es 3 no son coplanarios.

AB = (2,0,2); **AC** = (-1,1,-1). Vemos que son independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x)(0-2) - (y-1)(-2+2) + (z-1)(2-0) = -2x + 2z - 2 = 0 =$$

$= -x + z - 1 = 0$.

Como D $\in \pi \rightarrow -(2) + (m) - 1 = 0$, de donde **$m = 3$ para que los puntos sean coplanarios.**

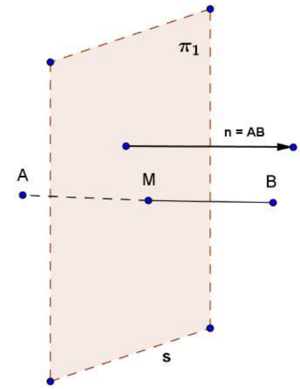
Veamos también que para rango(**AD,AB,AC**) = 2, det(**AD,AB,AC**) = 0, y saldrá m = 3.

$$\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & m-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -1(4 - (-1)(m-1)) = -4 - m + 1 = 0 \rightarrow m = 3.$$

(b)

Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

El plano π_1 que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.



AB = (2,0,2). Otro vector normal sería **n** = (1,0,1).
El punto medio del segmento AB es M((0+2)/2,(1+1)/2,(1+3)/2) = M(1,1,2).

Un plano paralelo a π_1 es x + z + K = 0, como M $\in$ π_1 $\rightarrow$ (1) + (2) + K = 0, de donde K = -3 y **el plano pedido es $\pi_1 \equiv$ x + z - 3 = 0.**
(c)
Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir la mitad del módulo (|| ||) del vector producto vectorial (x) de los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||.

AB = (2,0,2); **AC** = (-1-0, 2-1, 0-1) = (-1, 1, -1)**.**

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-2) - \mathbf{j}(-2+2) + \mathbf{k}(2-0) = (-2,0,2)$$

||**AB**x**AC**|| = $\sqrt{(2)^2+(0)^2+(2)^2}$ = $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$
Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = (1/2)·$2\sqrt{2}$ u^2 = $\sqrt{2}$ u^2

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\text{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{x\cdot\text{sen}(x)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\text{sen}(x^2)} = \frac{a(0)^2 + b(0) + 1 - \cos(0)}{0\cdot\text{sen}(0)} = 0/0.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\rightarrow\infty$), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\text{sen}(x^2)} = (0/0;L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{2ax + b + \text{sen}(x)}{2x\cdot\cos(x^2)} = \frac{2a(0) + b + \text{sen}(0)}{2(0)\cdot\cos(0^2)} = b/0.$$

Como me dicen que el límite existe y vale uno, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir b = 0, de donde **b = 0**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con b = 0, tenemos:

$$\mathbf{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2ax + \text{sen}(x)}{2x\cdot\cos(x^2)} = (0/0;L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{2a + \cos(x)}{2\cdot\cos(x^2) + 2x\cdot\left(2x\cdot(-\text{sen}(x^2))\right)} = \mathbf{(2a + 1)/(2 + 0)},$$ es

decir **1 = (2a + 1)/2,** de donde 2 = 2a + 1, por tanto **a = 1/2.**
Los valores pedidos son **a = 1/2** y **b = 0**.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Determina la función $f : (0,\infty) \to R$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1,2) (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

Por el Teorema fundamental del cálculo Integral que dice: Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función $G(x) = \int_a^x [\, f(t)\,]dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$.

En nuestro caso, en la práctica $f(x) = \int f'(x)dx$; $f'(x) = \int f''(x)dx$; $f''(x) = \int f'''(x)dx$, etc…

Como la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto P(1,2), sabemos que **f '(1) = 0.**

Como la gráfica de f pasa por el punto P(1,2), sabemos que **f(1) = 2.**

Recordamos que $\boldsymbol{\int \ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - x}$, pues **es una integral por partes** $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$.
$\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \to du = dx/x;\ dv = x \to v = \int dx = x \} = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot dx/x = x\cdot\ln(x) - \int dx =$
$= x\cdot\ln(x) - x$.

Empezamos **f '(x) =** $\int f''(x)dx = \int \ln(x)dx$ **= x·ln(x) - x + K.**
Como f '(1) = 0 $\to$ (1)·ln(1) - 1 + K = 0, de donde K = 1, luego *f '(x) = x·ln(x) - x + 1.*

Análogamente $f(x) = \int f'(x)dx = \int (x\cdot\ln(x) - x + 1)dx = \int (x\cdot\ln(x))dx - \int xdx + \int 1dx =$
$= I_1 - x^2/2 + x + L$.
$I_1 = \int x\cdot\ln(x))\, dx$, es también integral por partes $\{u=\ln(x) \to du=dx/x;\ dv=xdx \to v=\int xdx=x^2/2 \}$

$I_1 = \int x\cdot\ln(x))\, dx=(x^2/2)\cdot\ln(x) - \int(x^2/2)\cdot(dx/x) = (x^2/2)\cdot\ln(x) - (1/2)\int(x\cdot dx) = (x^2/2)\cdot\ln(x) - (1/2)(x^2/2) =$
$= (x^2/2)\cdot\ln(x) - (1/4)(x^2)$. Por tanto:
f(x) = $I_1 - x^2/2 + x + L = (x^2/2)\cdot\ln(x) - (1/4)(x^2) - x^2/2 + x + L$ $\mathbf{= (x^2/2)\cdot\ln(x) - (3/4)(x^2) + x + L}$.
Como f(1) = 2 $\to$ $2 = (1^2/2)\cdot\ln(1) - (3/4)(1^2) + 1 + L = 0 - 3/4 + 1 + L = 2$, de donde tenemos

que *L = 7/4*, y la función pedida es $\mathbf{f(x) = (x^2/2)\cdot\ln(x) - (3/4)(x^2) + x + 7/4}$.

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Junio 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
(a) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a)

Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

A como máximo tiene rango 2 y B como máximo tiene rango 3.

Estudiamos A

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}$ = - m - 4.

Si |A| = 0 $\rightarrow$ - m - 4 = 0, de donde m = -4.

Si **m ≠ -4**, det(A) ≠ 0 y **rango (A) = 2**.
Si **m = -4**, det(A) = 0 y **rango (A) = 1**, porque tiene algún elemento distinto de cero..

Estudiamos B

det(B) = |B| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix}$ = m(m + 4).

Si |B| = 0 $\rightarrow$ m·(m + 4) = 0, de donde m = 0 y m = -4.

Si **m ≠ 0** y **m ≠ -4**, det(B) ≠ 0 y **rango (B)) = 3**.

Si **m = 0**, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ = 4 ≠ 0, tenemos **rango (B) = 2.**

Si **m = -4**, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, y como me han quedado dos filas de la matriz con elementos distinto de cero, tenemos **rango (B) = 2.**

Luego para m = 0 tenemos rango(A) = rango(B) = 2,
(Me la ha comentado D. Javier García Gómez).

(a)

Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Ya hemos calculado los determinantes de A y B.

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}$ = **- m - 4** y **det(B) =** |B| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix}$ **= m(m + 4).**

Nos están pidiendo valores de **m** con *det(A) = det(B),* es decir *- m - 4 = m(m + 4)*. Pasándolo todo a un miembro **0** = (m + 4) + m(m + 4) = **(1 + m)·(m + 4)**, de donde **m = - 1** y **m = - 4.**
Por tanto si **m = - 1** y **m = - 4** tenemos que **det(A) = det(B).**

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Junio 2015

Sea el plano π ≡ 2x + y - z + 8 = 0.

(a) [1'5 puntos] Calcula el punto P', simétrico del punto P(2,-1,5) respecto del plano π.

(b) [1 punto] Calcula la recta r', simétrica de la recta r ≡ (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1 respecto del plano π.

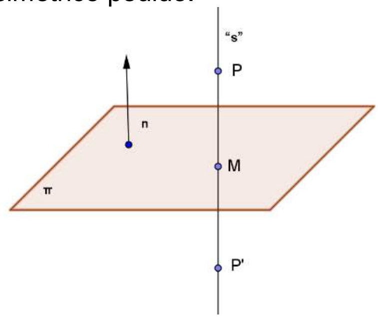
Solución

Sea el plano π ≡ 2x + y - z + 8 = 0.

(a)

Calcula el punto P', simétrico del punto P(2,-1,5) respecto del plano π.

Calculamos la recta "s" perpendicular (⊥), al plano π (el vector director **u** de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P. Determinamos M = s∩π, y M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.

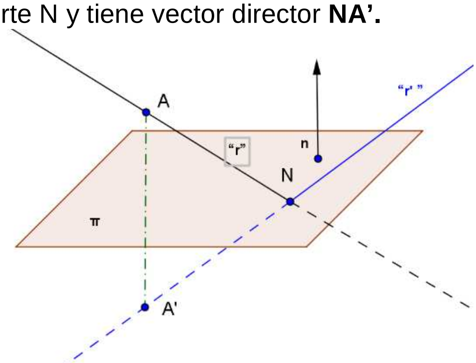


s(P;**u**) = s(P;**n**) con P(2,-1,5) y **n** = (2,1,-1).
Su ecuación vectorial es s ≡ (x,y,z) = (2+2b,-1+b,5-b) con b ∈ R.
M = s∩π → 2(2+2b) + (-1+b) - (5-b) + 8 = 0 = 6b+6, de donde **b = -1**, y el punto M es M(2+2(-1),-1+(-1),5-(-1)) = M(0,-2,6).

M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.
(0,-2,6) = ((2+x)/2,(-1+y)/2,(5+z)/2), de donde x = -2, y = -4+1 = -3, z = 12-5 = 7.

El simétrico pedido es P'(-2,-3,7).
(b)
Calcula la recta r', simétrica de la recta r ≡ (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1 respecto del plano π.

Para calcular la recta r', simétrica de la recta r, se calcula el punto de corte N de r con π, el punto A' simétrico del punto A(2,-1,5) de la recta r respecto al plano π. La recta r' pedida es la que pasa por el punto de corte N y tiene vector director **NA'.**



Si nos damos cuenta ya hemos calculado el simétrico del punto (2,-1,5), que antes se le ha llamado P, luego A' es A'(-2,-3,7).

Ponemos r en vectorial r ≡ (x,y,z) = (2-2c,-1+3c,5+c) con c ∈ R.
N = r∩π → 2(2-2c) + (-1+3c) - (5+c) + 8 = 0 = -2c + 6, de donde c = 3 y el punto N es N(2-2(3),-1+3(3),5+(3)) = N(-4,8,8)
L recta r' es r'(N;**NA'**) con N(-4,8,8) y **NA'** = (-2-(-4),-3-(8),7-8) = (2,-11,-1).

La recta es r' ≡ (x+4)/(2) = (y-8)/(-11) = (z-8)/(-1)